

實驗十一 運算放大器與主動濾波器電路

一、實驗目的：

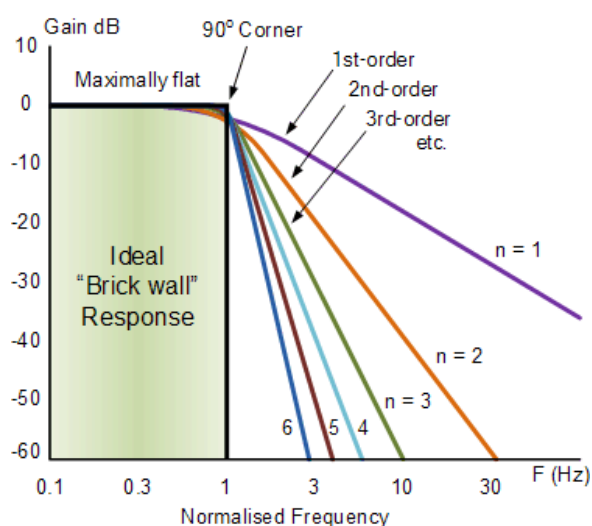
- (1) 了解巴特沃斯 (Butterworth) 濾波器與被動式 RC 濾波器電路頻率響應原理。
- (2) 了解使用運算放大器製作 Sallen-Key 電路之主動 (有源電路) 低通與高通濾波器的原理。
- (3) 利用運算放大器搭配輸出級電路製作有增益之帶通音源放大器電路。**可自行攜帶規格 4~16Ω 0.5~15W 喇叭單體 (或可拆解棄用之喇叭單體)，可較本實驗所提供之小喇叭有更顯著的音質。**

二、原理說明：

(1) Butterworth 濾波器

參考資料: https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter

巴特沃斯濾波器的特點是帶通頻帶 (passband) 內的頻率響應曲線最大限度平坦，沒有漣波，而在阻頻帶 (stopband) 則逐漸下降為零。一階巴特沃斯濾波器的衰減率為每十倍頻 20 dB，二階巴特沃斯濾波器的衰減率為每十倍頻 40 dB、三階巴特沃斯濾波器的衰減率為每十倍頻 60 dB，階數增加以此類推。巴特沃斯濾波器的振幅是 ω 的一個單調函數，並且也是唯一的無論階數，振幅對角頻率曲線都保持同樣的形狀的濾波器。濾波器階數越高，在阻頻帶振幅衰減速度越快。



n 階巴特沃斯低通濾波器的增益 $G(\omega)$ 為：

$$G^2(\omega) = |H(j\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

其中 n 為濾波器的階數， ω_c 為截止頻率（此處增益下降為 $(1/\sqrt{2})^n$ 倍），以及 G_0 為直流增益（零頻率增益）。

若採用 Laplace 轉換表示轉移函數 $H(s)$ ， $s = \sigma + j\omega$ ，依據

$$|H(s)|^2 = H(s)\overline{H(s)} = H(s)H(-s)$$

我們可得

$$H(s)H(-s) = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{-s^2}{\omega_c^2}\right)^n},$$

此式可看出來有 n 組對稱極點落於半徑為 ω_c 的圓上。基於 Laplace 反轉定理，若 $\sigma = 0$ ，我們考慮 $H(s)$ 極點為落在負實數軸的半平面區域。因此，選擇極點為

$$-\frac{s_k^2}{\omega_c^2} = (-1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{j(2k-1)\pi}{n}} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$s_k = \omega_c e^{\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

我們可以得到

$$H(s) = G_0 \prod_{k=1}^n \frac{\omega_c}{s - s_k} = G_0 \prod_{k=1}^n \frac{\omega_c}{s - \omega_c e^{\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}}}$$

其分母稱為 s 域之巴特沃斯多項式(Butterworth polynomial)。對於均一化 ($\omega_c=1$) 過的 n 階巴特沃斯濾波器其系統響應為

$$G_n(\omega) = |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$

而其多項式可以如下查表獲得。

n	Factors of Butterworth Polynomials $B_n(s)$
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + 1.414214s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.765367s + 1)(s^2 + 1.847759s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.618034s + 1)(s^2 + 1.618034s + 1)$
6	$(s^2 + 0.517638s + 1)(s^2 + 1.414214s + 1)(s^2 + 1.931852s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.445042s + 1)(s^2 + 1.246980s + 1)(s^2 + 1.801938s + 1)$
8	$(s^2 + 0.390181s + 1)(s^2 + 1.111140s + 1)(s^2 + 1.662939s + 1)(s^2 + 1.961571s + 1)$
9	$(s + 1)(s^2 + 0.347296s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1.532089s + 1)(s^2 + 1.879385s + 1)$
10	$(s^2 + 0.312869s + 1)(s^2 + 0.907981s + 1)(s^2 + 1.414214s + 1)(s^2 + 1.782013s + 1)(s^2 + 1.975377s + 1)$

舉例，若要設計一個巴特沃斯濾波器，在 2 倍截止頻率時振幅為直流增益的 1/10，最低的階數 n 必須滿足 $1 + 2^{2n} \geq 100$ ，亦即階數必須至少為 4。

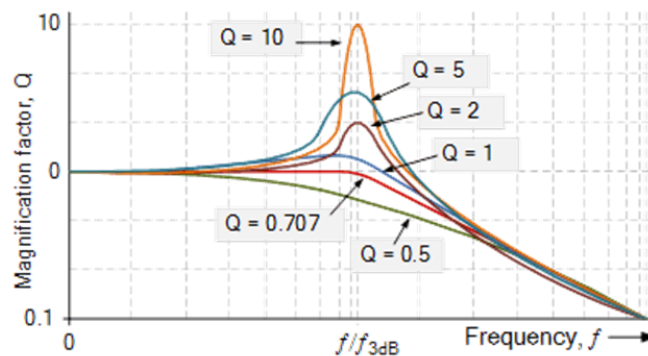
(2) 被動式二階低通濾波器

參考資料來源: <https://www.ti.com/lit/an/sloa024b/sloa024b.pdf>

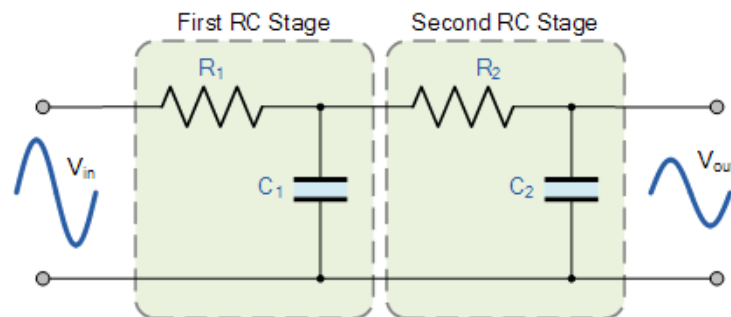
一個標準的二階低通濾波具有以下結構

$$H_{LP} = \frac{K}{-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + \frac{jf}{Qf_c} + 1}$$

其中 f_c 為截止頻率, Q 為品質因子 (quality factor), 可決定頻濾響應的峰值大小與寬度等關係。當 $f \ll f_c$ 時, 濾波器降階為常數大小 K 。當 $f = f_c$ 時, 濾波器變成 $-jKQ$, 訊號由 Q 值增強。當 $f \gg f_c$ 時, 濾波器特性為 $-K(f_c/f)^2$, 濾波器強度隨頻率增大而衰退。如下圖所示, 二階 Butterworth 濾波器的 Q 值即為 $1/\sqrt{2} = 0.707$, 亦即此時 $f_c = f_{-3dB}$ 。濾波器 Q 值越高, 在 f_c 頻率所形成的峰值越高。



製作一個被動式二階低通濾波器, 我們可將兩個簡單由 RC 電路所構成的一階低通濾波器連接在一起, 形成二階或兩極點濾波器網路, 如下圖所示。我們可以看到, 向一階低通濾波器添加一個額外的 RC 網路, 就可以將其轉換為二階類型, 並且我們添加的 RC 級越多, 濾波器的階數就越高。



理論上, 被動式二階低通濾波器的轉移函式可以推得

$$H(s) = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) + 1}$$

若令 $A = R_1 R_2 C_1 C_2$ 以及 $B = R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2$, 則

$$|H(w)| = \frac{1}{\sqrt{w^4 A^2 + w^2 (B^2 - 2A) + 1}}$$

為簡化分析，選擇 $R_2 = mR_1 = mR$ 以及 $C_1 = nC_2 = nC$ ，則

$$w_c = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{RC\sqrt{mn}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{A}}{B} = \frac{\sqrt{mn}}{m+n+1}$$

功率 -3dB 頻率為

$$w_{-3dB} = \sqrt{\frac{1}{A} - \frac{B^2}{2A^2} + \frac{\sqrt{8A^2 - 4AB^2 + B^4}}{2A^2}}$$

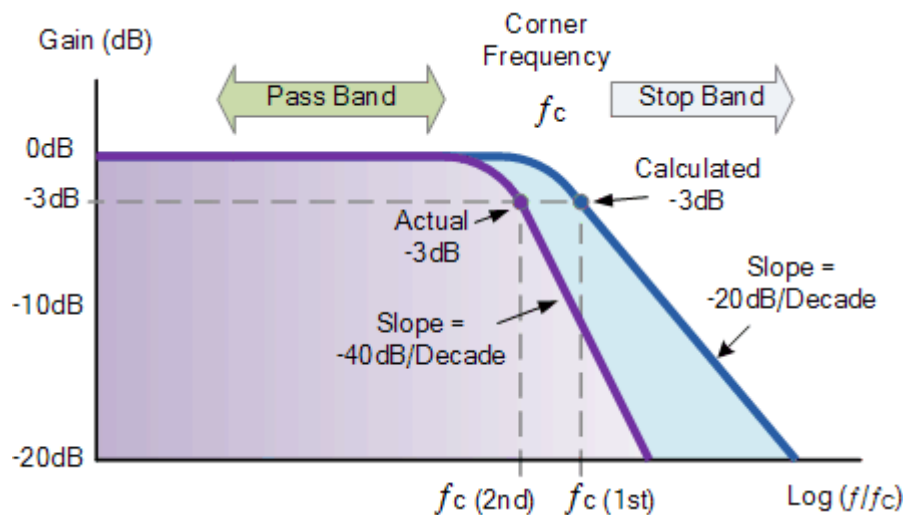
將多級 RC 濾波器串聯在一起可以形成的濾波器階次沒有限制，但隨著階數的增加，最終濾波器的增益和精度會下降。若新添加的每一層級，使其阻抗至少是前級的 10 倍以上，我們可以用各別單級 RC 電路的轉移函數來近似每一級的轉移函數。此時，

$$|H(w)| \approx \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^2}} \right)^n$$

其中 $w_c = 1/\sqrt{RC}$ 。功率 -3dB 頻率位置與截止頻率關係可簡化為

$$\omega_{-3dB} \approx \omega_c \sqrt{2^{1/n} - 1}$$

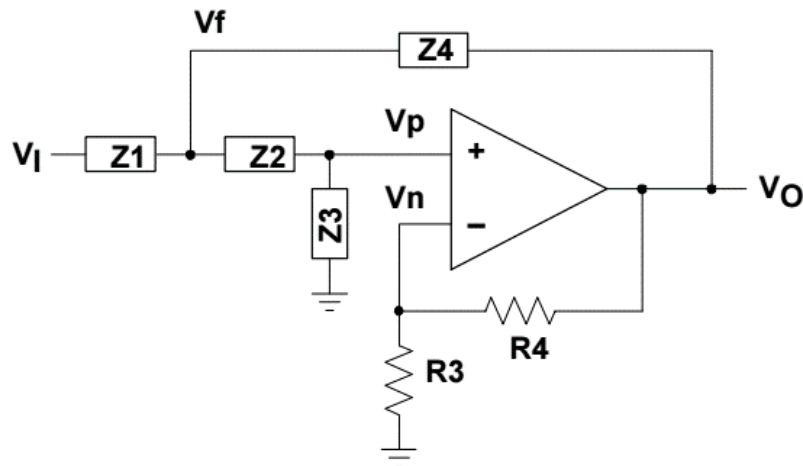
假設在相同的 -3dB 功率衰減條件下，二階低通濾波器相較於一階低通濾波器的頻率響應圖如下所示，越高階低通濾波器的截止頻率 f_c 將越小。



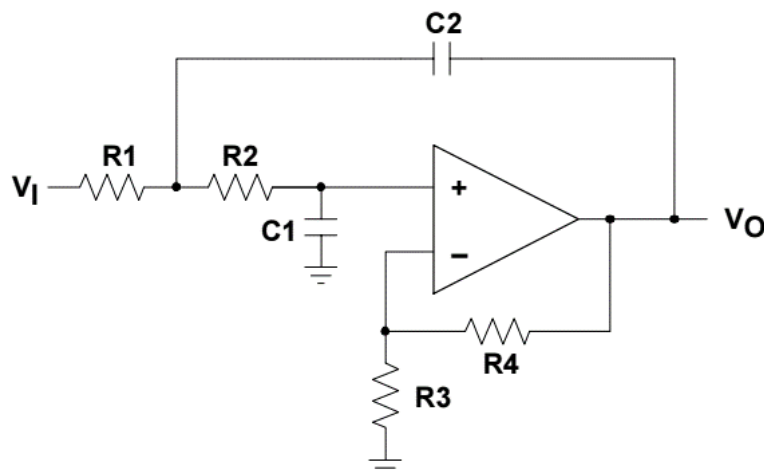
(3) Sallen-Key 二階低通濾波器

如下圖，Sallen-Key 濾波器設計是一種二階主動濾波器的電路結構，我們可以將其用作實現高階濾波器的基本電路結構，例如低通（LPF）、高通（HPF）和帶通（BPF）等濾波器電路。其結構是一種基於單個同相運算放大器和兩個電阻器的主動濾波器設計，從

而創建了具有高輸入阻抗、低輸出阻抗和良好穩定性的濾波器特性的壓控電壓源（VCVS）設計，因此允許將單個 Sallen-Key 濾波器聯在一起以產生更高階的濾波器。



Sallen-Key 低通濾波器如下圖所示:



其放大增益轉移函數經推導可得

$$\frac{V_o}{V_i}(lp) = \frac{K}{s^2(R_1R_2C_1C_2) + s(R_1C_1 + R_2C_1 + R_1C_2(1 - K)) + 1}$$

$$K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

$$s = j2\pi f$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_1C_1 + R_2C_1 + R_1C_2(1 - K)}$$

若我們以下列比例表示電路參數:

$$R_1=mR, R_2=R, C_1=C, \text{ and } C_2=nC,$$

我們可以簡化表示成以下關係

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC \sqrt{mn}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{mn}}{m + 1 + mn(1 - K)}$$

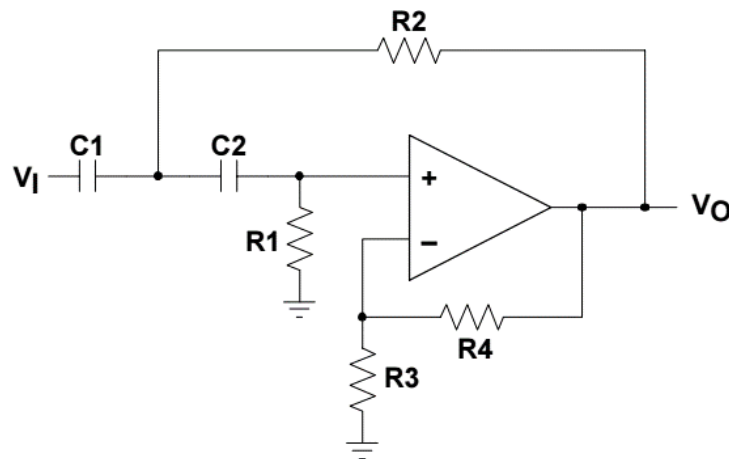
例如：選擇 $R_2=1\text{ k}\Omega$ ， $R_1=3.3\text{ k}\Omega$ ，則 $m=3.3$ ；選擇 $C_1=6.8\text{ nF}$ ， $C_2=2.3\text{ nF}$ ，則 $n=0.338$ 。放大增益為 3.2，我們可以得到 $f_c=22.16\text{ kHz}$ ，以及 $Q=0.572$ 。

(4) Sallen-Key 二階高通濾波器

一個標準的二階高通濾波器結構為

$$H_{HP} = \frac{-K\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}{-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + \frac{jf}{Qf_c} + 1}$$

其特性與低通濾波器剛好相反，當頻率遠低於 f_c 時，濾波器強度衰減，而當頻率遠大於 f_c 時，強度為 K 。而當頻率在 f_c 時，濾波器強度為 $-jKQ$ 。因此， Q 也決定了高通濾波器在頻率為 f_c 位置的振幅強化程度。Sallen-Key 高通濾波器如下圖所示



而其系統放大增益轉移函數為

$$\frac{V_o}{V_i}(hp) = \frac{K(s^2(R_1R_2C_1C_2))}{s^2(R_1R_2C_1C_2) + s(R_2C_2 + R_2C_1 + R_1C_2(1 - K)) + 1}$$

並且

$$K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - K)}$$

相同於低通濾波器的方式，若我們以下列比例表示電路參數：

$$R_1 = mR, R_2 = R, C_1 = C, \text{ and } C_2 = nC,$$

我們可以簡化表示成以下關係

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC \sqrt{mn}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{mn}}{n + 1 + mn(1 - K)}$$

例如：選擇 $R_2 = 47 \text{ k}\Omega$ ， $R_1 = 15 \text{ k}\Omega$ ，則 $m = 0.319$ ；選擇 $C_1 = C_2 = 0.1 \text{ }\mu\text{F}$ ，則 $n = 1$ 。放大增益為 3.2，我們可以得到 $f_c = 59.96 \text{ Hz}$ ，以及 $Q = 0.435$ 。

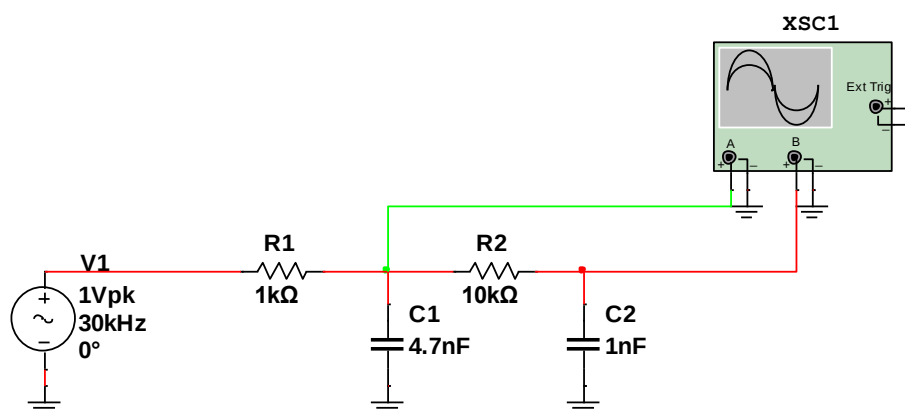
三、實驗器材：

電容	1nF, 4.7nF, 0.1 μF , 47 μF	x1
	1 μF	x2
電晶體	MJE3055T, MJE2955T	x1
二極體	1N4001	x2
運算放大器	LM358P (或 UTC358)	x1
電阻	1k Ω , 3.3k Ω , 15k Ω , 47k Ω	x1
	1.5k Ω , 10k Ω , 22k Ω	x2
喇叭單體	8 Ω /0.5W	x1

四、實驗步驟：

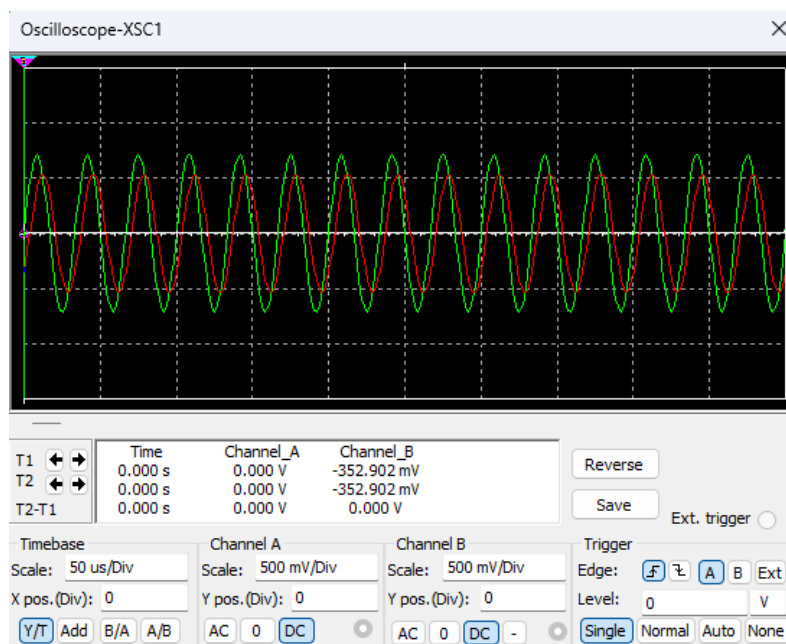
1. 工作一：二階 RC 低通濾波器電路

(1) 按工作一圖連接電路，固定信號產生器震幅為 1 V_{pk} 的正弦波，頻率可調作為測試輸入信號。

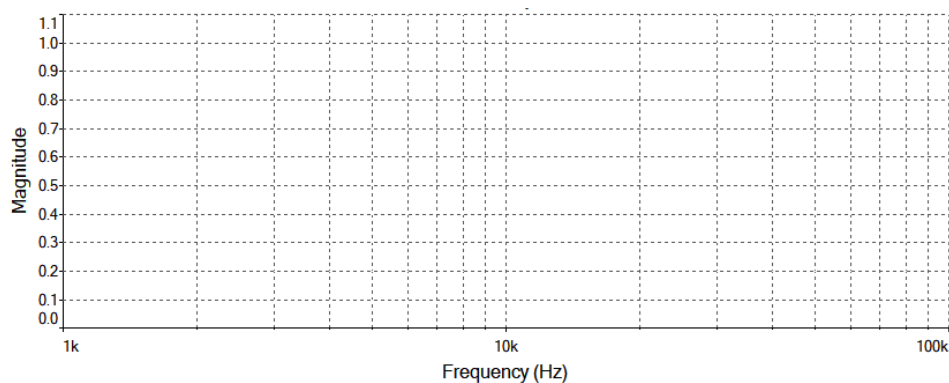


工作一圖

- (2) 將訊號產生器頻率從 1KHz 調至最大 100KHz 間隔 20 個點，紀錄在 C1 與 C2 上所觀察到的電壓峰值大小。



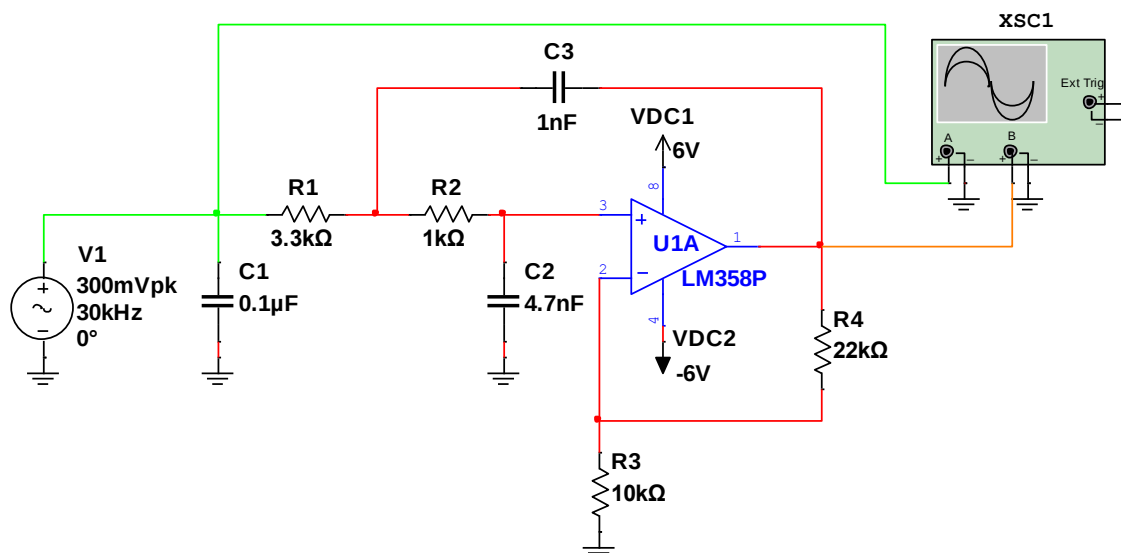
注意: 從 1KHz 調至 10KHz 時，以每 1 KHz 為間隔；從 10 KHz 調至 100KHz 時，以每 10 KHz 為間隔，將結果平滑連線繪製於下圖中，圖中 x 軸採對數單位，y 軸採線性為單位。



- (3) 分析此電路在 C1 與 C2 點上面的 -3dB 功率轉折頻率是否與量測的結果相近。
- (4) 考慮 y 軸若為 dB 單位，測試訊號改變從 10KHz 到 100KHz，C1 與 C2 上的電壓衰減差距了多少 dB?

2. 工作二： Sallen-Key 二階低通濾波器電路

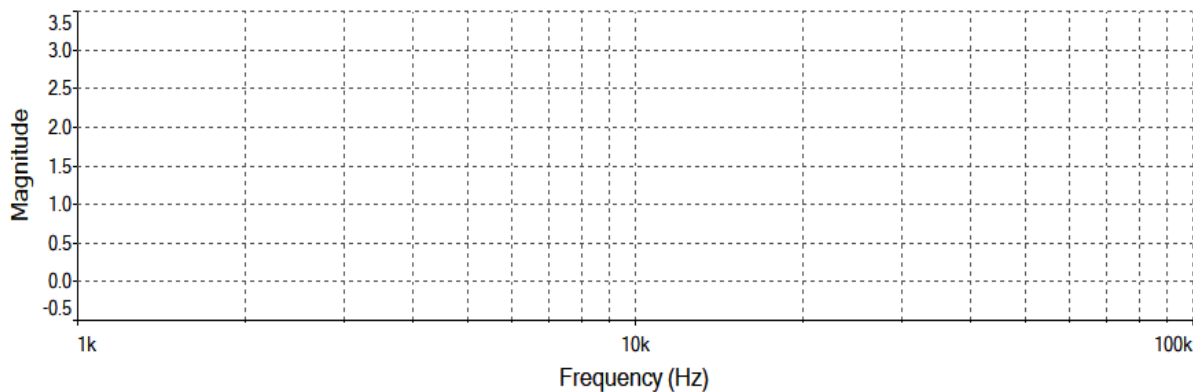
- (1) 按工作二圖連接電路，固定信號產生器輸出震幅為 300mVpk 的正弦波，頻率可調作為測試輸入信號。



工作二圖

- (2) 將訊號產生器頻率從 1KHz 調至最大 100KHz 間隔 20 個點，紀錄 U1A 輸出所觀察到的電壓峰值大小。

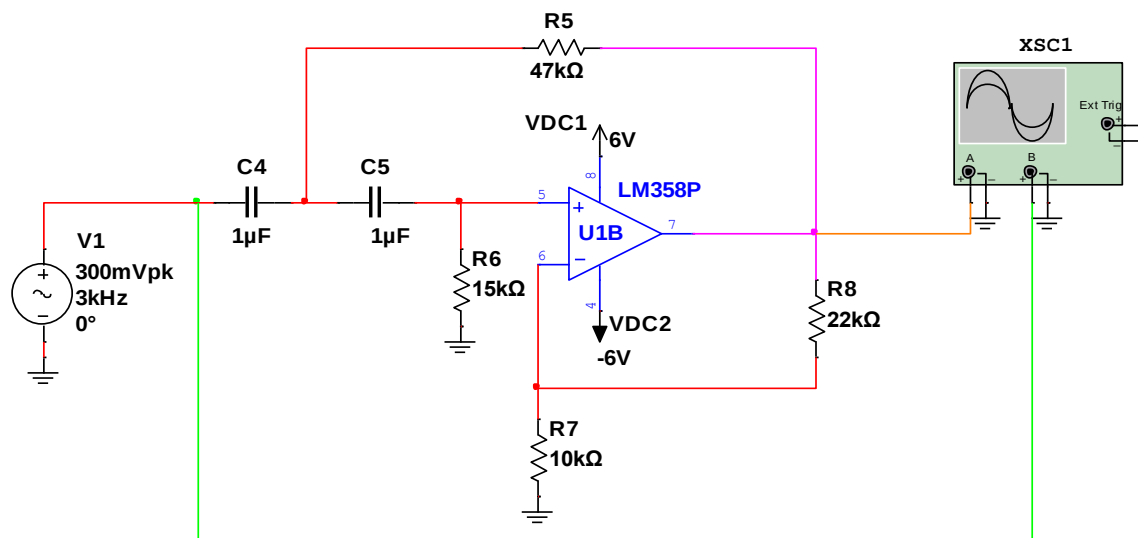
注意：從 1KHz 調至 10KHz 時，以每 1 KHz 為間隔；從 10 KHz 調至 100KHz 時，以每 10 KHz 為間隔，將結果平滑連線繪製於下圖中，圖中 x 軸採對數單位，y 軸採線性為單位。



- (3) 分析此電路的 -3dB 功率轉折頻率是否與量測的結果相近。
- (4) 考慮 y 軸若為 dB 單位，測試訊號改變從 10KHz 到 100KHz，輸出的電壓衰減了多少 dB?

3. 工作三：Sallen-Key 二階高通濾波器電路

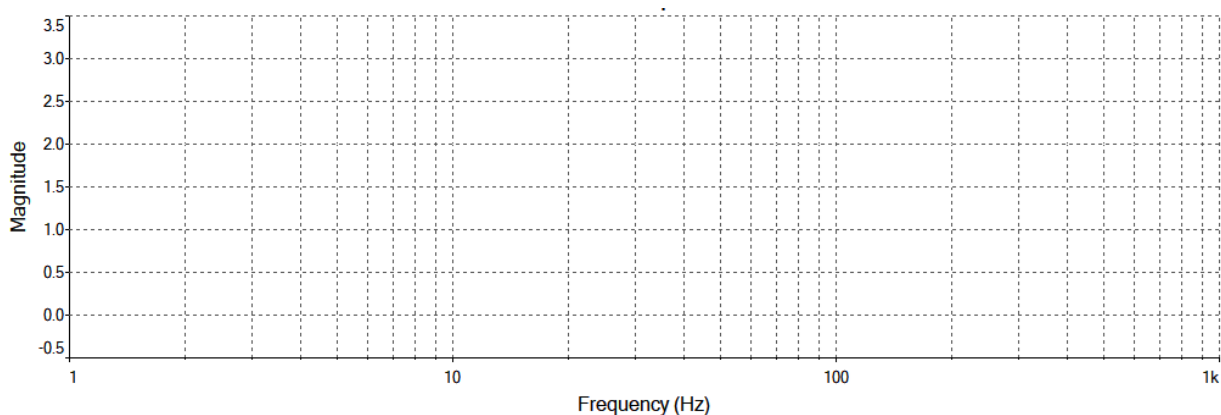
- (1) 按工作三圖連接電路，調信號產生器輸出震幅為 300mVpk 的正弦波，頻率可調作為測試輸入信號。



工作三圖

- (2) 將訊號產生器訊號頻率從 1Hz 調至最大 1KHz 間隔 30 個點，紀錄 U1B 輸出所觀察到的電壓峰值大小。

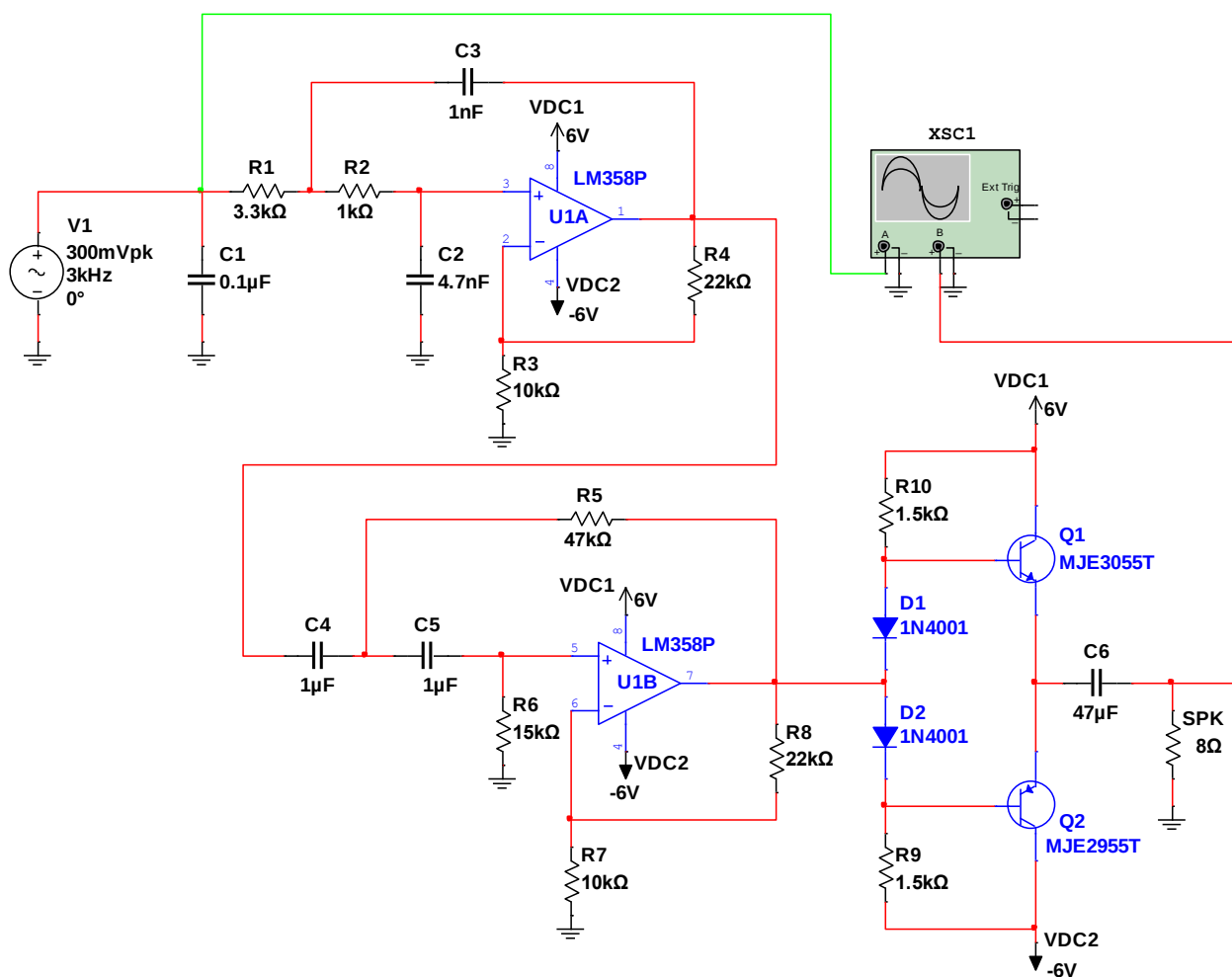
注意：從 1Hz 調至 10Hz 時，以每 1Hz 為間隔；從 10Hz 調至 100Hz 時，以每 10Hz 為間隔；從 100 Hz 調至 1KHz 時，以每 100Hz 為間隔，將結果平滑連線繪製於下圖中，圖中 x 軸採對數單位，y 軸採線性為單位。



- (3) 分析此電路的 -3dB 功率轉折頻率是否與量測的結果相近。
- (4) 考慮 y 軸若為 dB 單位，測試訊號改變從 100Hz 到 10Hz，輸出的電壓衰減了多少 dB？

4. 工作四：音源放大器

- (1) 參考下圖，完成工作四線路。V1 先接訊號產生器輸入測試訊號，之後 V1 改用音源輸入的左聲道(或右聲道)，喇叭單體可以採用本實驗所提供的基本 8Ω 0.5W 單體，或是可自備一般規格 4~16Ω 0.5~15W 喇叭單體測試，也可併連兩個單體獲得不同音質的協調。



工作四圖

- (2) 測試頻率響應：將 V1 測試訊號設定振幅 300mVpk (600mVpp)，調整 100Hz 至 20KHz 的正弦波輸入，SPK 先移除不接，量測以下幾個頻率點上示波器所觀察到的弦波震幅紀錄於下表 1。

項目	100Hz	500Hz	1KHz	3KHz	5KHz	10KHz	15KHz	20KHz
輸入端 Vpp								
U1B 輸出 Vpp								
C6 輸出 Vpp								
音源放大增益								

表 1

- (3) 將 V1 輸入固定為 1KHz，將輸入電壓由 200mVpk 慢慢往上調，觀察在不同電壓源電壓值下，最後輸出不失真（輸出弦波未見變形）情況下的最大輸入訊號 Vpk 大約是多少？將結果紀錄於表 2。

VD1/VD2 電壓	5/-5 Volt	6/-6 Volt	7 /-7Volt	8/-8 Volt	9/-9 Volt
V1 最大輸入訊號 V _{pk} 值					

表 2

- (4) 將 VD1/VD2 電壓源固定在 6/-6 Volt (或 7/-7 Volt)，以降低耗能。V1 輸入端改用音源輸入的左聲道(或右聲道)，喇叭單體此時接上 C6 輸出，以電腦/手機撥放音樂，並在示波器上觀察音源輸入端的 V_{pp} 值，調整音樂輸出音量不要超過表 2 所記錄的最大輸入電壓限制，聽看看音樂效果。如果將音量調整超過表 2 電壓限制，是否會發生音樂失真現象？

五、 問題討論：

1. 討論工作一電路與二階 butterworth 低通濾波器的衰減率相比，何者為佳？差距多少？
2. 討論是否可以將工作一電路參數調整出一個 Q 值與二階 butterworth 低通濾波器相近？可寫一個簡單程式分析並說明如何給出你的結論。
3. 試分析工作二電路的 -3dB 功率轉折頻率、截止頻率、以及 Q 值大小。
4. 試分析工作三電路的 -3dB 功率轉折頻率、截止頻率、以及 Q 值大小。
5. 分析若工作三電路中的 C4 與 C5 電容都改成 0.1μF，-3dB 功率轉折頻率與截止頻率會有甚麼改變？Q 值是否也會改變？
6. 基於工作四項目(2) 的紀錄，此輸出級電路對於整體放大增益的影響如何？
7. 若固定工作四的 VD1/VD2 電壓，將電腦/手機的音樂輸出訊號不斷調大，對於喇叭輸出聲音會有甚麼影響？以電路分析說明為何會有此現象？
8. 比較工作四電路與實驗 9 電路作為音樂放大器，討論兩電路的音質優劣處與影響原因。